جامعة البعث — كلية العلوم — قسم الرياضيات

امتحان مقرر الدوال محدودة التغير
الفصل الثاني للعام 2015/ 2016
السنة الثالثة - رياضيات

اسم الطالب : براءة الأشقر
الدرجة : 100
المدة : 90 دقيقة

السؤال الأول(30 درجة): 1) أثبت مايلي: تكون الدالة f ذ ت م على الفترة $[a,b]$ إذا وفقط إذا وجدت دالة مثل G محدودة و متزايدة على $[a,b]$ و تحقق العلاقة:

$$|f(x'')-f(x')|\le G(x'')-G(x');\ a\le x'<x''\le b$$

2) أوجد دالة التغير للدالة : $g(x)=[x]+9$ على الفترة $[0,4]$ ، و استنتج التغير الكلي لدالة التغير على نفس الفترة .

3) ناقش الاستمرار المطلق- الاستمرار المنتظم -القيوسية للدالة : $f(x)=x\cos\frac{\pi}{2x};x\in]0,1]$ ، $f(0)=0$ على الفترة $[0,1]$.

السؤال الثاني (40 درجة): 1) ميز أي من الدوال الآتية :

$$1)\ y_1=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{-x}{n})^n ;x\in[0,\infty[\quad .\ 2)\ y_2=\int\frac{dx}{x^2+4};\ x\in[0,1].$$

$$3)\ y_3=e^{ix};i=\sqrt{-1};x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$$

ذ ت م على الفترة المجاورة لكل منها ، ثم تحقق من أن y_2 تحقق شرط ليبشتز عليها ، و أحسب التغير الكلي لـ y_1 على نفس الفترة.

2) إذا كانت $X=R$ و L صف المجموعات المقيسة لوبيغياً و λ قياس ليبيغ و لتكن المتتالية : $\{A_n\}_{n\ge1}$ حيث $A_n=[-n,-n+1[\cup[n-1,n[$.بين فيما إذا كان القياس λ منته و كذلك منته؟ مع التعليل ، و ماذا نقصد بقياس ليبيغ في R.

3) لنأخذ الدالة الآتية :

$$h(x)=\begin{cases}x^2+1 & ;\ 1\le x\le 3\\ 2x+3 & ;\ 3<x<4\\ 15 & ;\ 4\le x\le 6\end{cases}$$

و المطلوب:

أ) أحسب التغير الكلي لهذه الدالة على $[1,6]$ و استنتج مجموع قفزاتها في نقاطها الداخلية . و ما هو قياس مجموعة نقاط الانقطاع لها حسب ليبيغ؟ ولماذا ؟

ب) تأكد من وجود تكامل ستيلجس للدالة : $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ بالنسبة للدالة h السابقة على $[1,6]$، ثم أحسبه في حال وجوده.

السؤال الثالث (30درجة): 1) اكتب صيغة الدالة λ^* ، ثم أثبت أنها تكون قياساً خارجياً على $P(R)$.

2) بفرض لدينا المجموعة : $X=\{2,3,5,7\}$ و: الصف $A=\{\Phi,X,\{3\},\{5\},\{3,5\}\}$

ادرس إن كان هذا الصف ، تبولوجيا- جبر تام على X ؟ و لماذا ؟ و ماهو أصغر جبر يحوي A .

3) بين أن الدالتين : $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3};x\ne3$ & $g(x)=x+3$

متساويتان تقريباً في كل مكان على $[0,5]$ ثم أحسب تكامل ليبيغ لـ f على $[0,5]$ بعد التأكد من وجوده .

-----------------------انتهت الأسئلة-----------------------

حمص في 2016/7/11

مدرس المقرر: د.محمد عامر

مع تمنياتي لكم بالتوفيق

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

توزيع درجات الدوال محدودة التغير
الفصل الثاني الأول $\frac{2015}{2016}$
السنة الثالثة - رياضيات

الدرجة: 100°

س1 (30°) أ) الإثبات: لنثبت أن الدالة محدودة التغير إذا وفقط إذا ... وهو شرط اللزوم والكفاية.

1) **اللزوم**: نفرض أن f ذات تغير محدود على $[a,b]$، ولنعتبر G بالشكل:

$$G(x) = v_f(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}}(f) \quad ; \quad x \in [a,b]$$

(10)

نجد مباشرة أن G متزايدة ومحدودة على $[a,b]$ ومن أجل $a \le x' < x'' \le b$ يكون:

$$|f(x'') - f(x')| \le \overset{x''}{\underset{x'}{V}}(f) = \overset{x''}{\underset{a}{V}}(f) - \overset{x'}{\underset{a}{V}}(f) = G(x'') - G(x')$$

2) **الكفاية**: نفرض أن الدالة G موجودة، ولنثبت أن f ذات تغير محدود على $[a,b]$. في الحقيقة من أجل أي تجزئة لـ $[a,b]$ ولتكن P نجد:

$$v(f,P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \le \sum_{k=1}^{n} [G(x_k) - G(x_{k-1})] = G(b) - G(a)$$

(لأن G محدودة).

ما يعني أن f ذات تغير محدود على $[a,b]$.

(20)

(ب) إثبات أن الدالة g ذات تغير محدود على $[0,4]$ حيث دالة أكبر عدد صحيح ذات تغير محدود على $[a,b]$ ودالة لأنها متزايدة على هذه الفترة ولأنها أيضاً ذات تغير محدود على $[0,x]$ ($0 < x \le 4$)، ومنه من أجل تجزئة ما للفترة $[0,x] \subset [0,4]$:

$$v(g;P) = \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| = [x_k] - [x_{k-1}] = [x]$$

لذا دالة التغير هي:

$$v_g(x) = \overset{x}{\underset{0}{V}}(g) = \begin{cases} [x] & ; \ 0 < x \le 4 \\ 0 & ; \ x = 0 \end{cases}$$

والتغير الكلي لدالة التغير هو:

$$\overset{4}{\underset{0}{V}}(v_g) = \overset{4}{\underset{0}{V}}(g) = [4] - [0] = 4$$

(ج) لا نعلم أن الدالة f ليست ذات تغير محدود على $[0,1]$ وهنا إثباته، وبما أنها لذلك لا يمكن أن تكون مستمرة مطلقة على $[0,1]$ لأنها لو كانت مستمرة مطلقة لكانت ذات تغير محدود على $[0,1]$.

بما أن الدالة مستمرة على $[0,1]$ فهي مستمرة بانتظام عليها حسب مبرهنة ... وبما أنها مستمرة على $[0,1]$ مبرهنة ...

ت ج

ج 4 (40°) 1) بالنسبة لـ y هي: $y_1 = e^{-x}$

(المؤكدة) وهي دالة مستمرة تماماً على $[0,\infty[$ فلذا الحل ذات ج على لا تشترط التكامل هنا.

$$\bigvee_0^\infty (e^{-x}) = -\lim_{A\to\infty} e^{-A} + e^{0} = 1$$

وأما الدالة y_2 فهي:

$$y_2 = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C \quad ; C\in\mathbb{R},\ x\in[0,1]$$

وهذه الدالة متزايدة تماماً في $[0,1]$ أنه مشتقها محدودة عليها ولكن المشتقة محدودة على $[0,1]$ تتحقق شروطها تماماً على أساس التعريف.

وأما الدالة y_3 فهي:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

هذه الدالة عقدية (مركبة) في $[0,\frac{\pi}{6}]$ والمستمرة ذات ج ت في $[0,\frac{\pi}{6}]$ التي لا تعتمد.

2) $X=\mathbb{R}$ و $\mathcal{L}$ صف المجموعات القابلة للقياس لوبيغ و λ قياس لوبيغ:

المجموعات A_n ($n\geq 1$) محققة وقياسها لوبيغ ومنفصلة مثنى مثنى لأنه:

$$\lambda(A_n) = 2 \quad \& \quad X=\mathbb{R}=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

لأنه نلاحظ أن λ هو قياس σ-منته، ولا يمكن أن يكون منتهياً لأنه $\lambda(\mathbb{R})=\infty$،

قياس لوبيغ: القياس λ المعرف على الجبر $\mathcal{L}$ يسمى قياس لوبيغ في $\mathbb{R}$.

المجموعة $E\in\mathcal{L}$ تسمى قابلة للقياس لوبيغ وقياسها هو $\lambda(E)$ (العدد).

20

3) التغير الكلي لـ h:

$$\bigvee_1^6 (h) = |h(3)-h(1)| + |h(4)-h(3)| + |h(6)-h(4)|$$

$$= |10-2| + |11-9| + |15-15| = 2+2+0 = 4$$

مجموع القفزات:

$$[h(3+0)-h(3-0)] + [h(4+0)-h(4-0)] = [9-10]+[15-11]$$

$$= -1+4 = 3 \leq 15-2 = 13$$

فمجموعة النقاط (الانقطاع) $\{3,4\}$ هي الصفر حسب لوبيغ أي $(\lambda(\{3,4\})=0)$

حساب تكامل ستيلتجس (موجود)

20

T.E

(3)

ج ١ :

س الخامس : الدالة $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ والدالة h ذات [illegible] $[1, 6]$

لو نشير الى التكامل محدود في نقطة الفترة ، لهذا فان التكامل موجود وحسب الشرط .

$$J = (S)\int_1^6 f(x)\,dh(x) = (R)\int_1^3 f(x) h'(x)\,dx + (R)\int_3^4 f(x) h'(x)\,dx +$$

$$f(3)[h(3+0) - h(3-0)] + f(4)[g(4+0) - g(4-0)]$$

$$= \int_1^3 \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int_3^4 \frac{2}{x^2+1}\,dx + 10(-1) + 15(4)$$

$$= \ln(x^2+1)\Big|_1^3 + 2[\arctan x]_3^4 - 10 + 60 = \ln 10 - \ln 2 + 2\arctan 4$$

$$- 2\arctan 3 + 50$$

س 3 (30°) (أ) عرف λ^* على

$\lambda^* : P(R) \to [0, +\infty]$

$: E \longmapsto \lambda^*(E) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) : E \subseteq (\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k)\}$

إثبت أن λ^* قياساً خارجياً على $P(R)$ ، تحقق الشروط :

(20) [1] $\lambda^*(\phi) = 0$ حسب التعريف ، [2] إذا كانت E و G في $P(R)$ ، $E \subseteq G$ ، $\forall$ عرض الأولى

لـ G هو غطاء لـ E حسب تعريف ، $\lambda^*(E) \leq \lambda^*(G)$ (الرتابية)

[3] $\lambda^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n)$ إذا كانت $\{E_n\}$ متتالية في $P(R)$.

(2) ليكن $X = \{2,3,5,7\}$ والصف A .

هذا الصف [illegible] واضح [illegible] ولكنه ليس جبراً على X المفروض لعدم تحقق شرط

الجبر [illegible] X ، وأصغر جبر [illegible] (أي لـ A) هو ،

$S = \{\phi, X, \{3\}, \{5\}, \{3,5\}, \{3\}', \{5\}', \{3,5\}'\}$.

(3) الدالتان [illegible] متساويتان تقريباً على نقاط ع $[0, 5]$ ، [illegible] مجموعة [illegible]

(10) [illegible] $\lambda(\{3\}) = 0$ ،

وجود تكامل ليبيغ [illegible] لأنهما متساويتان تقريباً [illegible] $[0,5]$ والمحدودة على الفترة

محدودة [illegible] وجود . [illegible] g [illegible] $[0,5]$ فان [illegible]

[illegible] تقريباً على [illegible] $[0,5]$ وحسب [illegible] ،

$$I = (L)\int_{[0,5]} (x+3)\,dx = (R)\int_0^5 (x+3)\,dx = [\frac{x^2}{2}]_0^5 + [3x]_0^5 = \frac{25}{2} + 15 = \frac{55}{2}$$

أستاذ المادة
د. محمد [illegible]

[illegible]

[illegible]

Scanned by CamScanner